4- Yeterlilik (Sufficiency):

$\hat{\theta}$ tahmin edicisi, θ yı tahmin etmek için örneklemdeki tüm bilgiyi kullanıyorsa $\hat{\theta}$, θ için yeterli tahmin edicidir. Yani örneklem içinde parametre hakkında ne kadar bilgi varsa, hiçbir bilgi kaybı olmadan olmadan özetleyen bir tahmin edici, o parametre için yeterlidir.

$x_1, \ldots, x_n$ $(\underset{\sim}{x})$ örneklemi için $\theta(\underset{\sim}{x})$ tahmin edici olsun.

$\theta(\underset{\sim}{x})$ verildiğinde, $\underset{\sim}{x}$ nın koşullu dağılımı θ'ya bağlı değilse $\theta(\underset{\sim}{x})$'a θ için yeterli tahmin edici denir.

Teorem: T tahmin edicisinin θ için yeterli olması için gerek ve yeter koşul $(x_1, \ldots, x_n) = \underset{\sim}{x}$

$$\frac{p(\underset{\sim}{x}, \theta)}{q(T(\underset{\sim}{x}), \theta)}$$ oranının θ'dan bağımsız olmasıdır.

Teorem: (Fisher-Neyman teoremi)

$X_1, \ldots, X_n$; $f_X(x, \theta)$ dağılımından rasgele örneklem olsun. $\hat{\theta} = h(x_1, \ldots, x_n)$ tahmin edicisinin θ için yeterli tahmin edici olması için gerek ve yeter koşul,

$$\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta) = f_{\hat{\theta}}(x, \theta) \cdot s(x_1, \ldots, x_n)$$ olmasıdır.

Yani, o.o.y.f; $\hat{\theta}$'nın o.y.f.si ile yalnız x_i'lere bağlı $(s(x_1 \ldots x_n))$'nin çarpımı şeklinde yazılabilmeli.

(Akdi, 302)

Minimal Yeterlilik:

θ^* istatistiği, θ parametresi için yeterli olsun. Eğer bir $\hat{\theta}$ tahmin edicisi, θ^* yeterli istatistiğinin bir fonksiyonu olarak yazılabiliyorsa, $\hat{\theta}$'a θ için minimal yeterli denir.

Teorem: $(X_1, \ldots, X_n)$; o.y.f. $f(x,\theta)$ olan kitleden örneklem olsun.

$$\frac{f(\underset{\sim}{x},\theta)}{f(\underset{\sim}{y},\theta)} = g(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{y}), \ \theta \text{'dan bağımsız} \iff \hat{\theta}(\underset{\sim}{x}) = \hat{\theta}(\underset{\sim}{y})$$

önermesi iki yönlü sağlanıyorsa $\hat{\theta}$, θ için minimal yeterlidir.

Örnek: $X_1, \ldots, X_n$; $N(\mu,\sigma^2)$'den örneklem

$$\frac{f(\underset{\sim}{x},\mu,\sigma^2)}{f(\underset{\sim}{y},\mu,\sigma^2)} = \frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{\sum\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \cdot e^{\sum\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}}$$

$$= \frac{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum x - \cancel{\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}}}{\cancel{\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum y^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum y - \cancel{\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}}}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum x}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum y^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\sum y}} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum x^2 - \sum y^2\right] + \frac{\mu}{\sigma^2}\left(\sum x - \sum y\right)}$$

olup, bu oranın (μ,σ^2) parametrelerinden bağımsız olması için gerek ve yeter koşul, $\sum x^2 = \sum y^2$ ve $\sum x = \sum y$ olmasıdır. Yani, $\hat{\theta}(\underset{\sim}{x}) = \left(\sum x, \sum x^2\right)$, $\hat{\theta}(\underset{\sim}{y}) = \left(\sum y, \sum y^2\right)$

olmak üzere $\hat{\theta}(\underset{\sim}{x}) = \hat{\theta}(\underset{\sim}{y})$ olmasıdır.

Böylece, $\hat{\theta}(\underset{\sim}{x})$ ist. (μ, σ^2) için minimal yeterlidir. Ayrıca $\hat{\theta}$'nın bir fonksiyonu olan $\hat{\theta}^* \cancel{=} \left(\frac{\sum x}{n}, \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}\right) = (\bar{x}_n, S_n^2)$'de (μ, σ^2) için minimal yeterlidir.

<u>Örnek</u>: $X_1, \dots, X_n$; λ parametreli Poisson parametresi için yeterli tahmin $\hat{\lambda} = \bar{x}$'nın λ parametresi için yeterli tahmin edici old. Fisher–Neyman Teo. göst.

$$\prod^{n} p(x, \lambda) = f(\hat{\lambda}, \lambda) \cdot s(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \prod^{n} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_i}}{x!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_1}}{x_1!} \cdots \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\cdot\lambda} \cdot e^{\sum x_i}}{\prod^{n} x_i!} = \frac{e^{-n\lambda} \cdot e^{n\cdot\bar{x}}}{\prod x_i!}$$

$$= \underbrace{\frac{e^{-n\cdot\lambda} \cdot e^{n\bar{x}}}{(n\cdot\bar{x})!}}_{\substack{n\cdot\bar{x} = \sum x \\ \text{değişkeninin olasılık} \\ \text{fonk. ve parametresi} \\ n\lambda \text{ dır}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{(n\cdot\bar{x})!}{\prod x_i!}\right)}_{\text{Bu terim } x\text{'lere bağlı}}$$

$n\cdot\bar{x}$, $\bar{x}$'nın birebir fonk. old. için $\hat{\lambda} = \bar{x}$, λ için yeterli tahmin edicidir.

5- Tutarlılık (Consistency)

Bir tahmin edicinin limit durumundaki özelliğidir. Örneklem ne kadar büyürse tahmin edicinin değeri, gerçek değere o kadar yakın olur.

$\varepsilon > 0$ için asimtotik durumda

$$\lim_{n \to \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$$

(olasılıkta yakınsak)

$\hat{\theta}_n$, θ için tutarlıdır.

Ayrıca $\hat{\theta}_n$, θ için yansız ise

$$\lim_{n \to \infty} V(\hat{\theta}_n) \to 0$$

oluyorsa $\hat{\theta}_n$, θ için tutarlı.

Asimtotik yansızlık

$$\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta \text{ ise}$$

$n \to \infty$, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

~~Örnek~~: Tahmin edicilerin tutarlılık özelliği Chebyshev eşitsizliğinden de elde edilebilir. θ parametreli kitleden örnekler $X_1, \dots, X_n$, $\hat{\theta}_n$'da θ'nın tahmin edicilerinin bir dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ için

$$P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) \leq \frac{E(\hat{\theta}_n - \theta)}{\varepsilon^2}$$

yazılır.

$n \to \infty$ için $E(\hat{\theta}_n - \theta) \Rightarrow 0$ ise $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ dır.

Yani $\hat{\theta}_n$ tahmin ediciler dizisi θ için Tutarlı olması için $E(\hat{\theta}_n - \theta)^2 \to 0$ olması yeterlidir.

Diğer taraftan,

$$E(\hat{\theta}_n-\theta)^2 = E(\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n) + E(\hat{\theta}_n) - \theta)^2$$

$$= V(\hat{\theta}_n) + [E(\hat{\theta}_n)-\theta]^2$$

$\hat{\theta}_n$ tahmin edicilerin bir dizisi olsun,

eğer, $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}_n)=0$ ve $\lim_{n\to\infty} [E(\hat{\theta}_n)-\theta)^2=0$

oluyorsa $\hat{\theta}_n$ tahmin ediciler dizisi θ için Tutarlıdır.

Örnek: $X_1, \dots, X_n$; $f(x,\theta)$ o.y.f. den bir örneklem.

$$f(x,\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & \text{d.h.} \end{cases}$$

$\hat{\theta}_n = X(1)$ sıra ist. θ için yeterlidir.

$\hat{\theta}_n$ nın o.y.f. si.

$i=1$ $\quad f_{X(i)}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\cdot(n-i)!}\cdot f(x)\cdot[F(x)]^{i-1}\cdot[1-F(x)]^{n-i}$

$$= n\cdot e^{-(x-\theta)}\cdot[1-F(x)]^{n-1}$$

$$F(x)=\int_0^x e^{-(x-\theta)}\cdot dx = -e^{-(x-\theta)}\Big|_0^x$$

$$= 1-e^{-(x-\theta)}$$

$$= n\cdot e^{-(x-\theta)}\cdot[\cancel{1}-1+e^{-(x-\theta)}]^{n-1} = n\cdot e^{-n\cdot(x-\theta)}$$

$$\Rightarrow E(\hat{\theta}_n)=\int_\theta^\infty \underbrace{x}_{u}\cdot n\cdot \underbrace{e^{-n\cdot(x-\theta)}\cdot dx}_{dv} \qquad x>\theta$$

$x=u \quad dx=du$

$e^{-n\cdot(x-\theta)}dx=dv$

$$= \cancel{n}\cdot\left[x\cdot\left(-\frac{e^{-n(x-\theta)}}{\cancel{n}}\right)\Big|_\theta^\infty + \int_\theta^\infty \frac{e^{-n\cdot(x-\theta)}}{\cancel{n}}\cdot dx\right] \qquad \frac{e^{-n\cdot(x-\theta)}}{-n}=v$$

$$= \theta + \frac{e^{-n.(x-\theta)}}{-n} \Big|_{\theta}^{\infty} = \theta + \frac{1}{n} \;//$$

$$E(x^2) = \int_{\theta}^{\infty} \underbrace{x^2}_{u} . n . \underbrace{e^{-n.(x-\theta)} . dx}_{dv}$$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$e^{-n.(x-\theta)} . dx = dv$

$v = \frac{e^{-n.(x-\theta)}}{-n}$

$$= \cancel{n} . \left[x^2 . \left(\frac{e^{-n.(x-\theta)}}{-\cancel{n}} \right) \Big|_{\theta}^{\infty} + \int_{\theta}^{\infty} \frac{e^{-n.(x-\theta)}}{\cancel{n}} . 2x . dx \right]$$

$$= \theta^2 + \frac{2.}{n} \underbrace{\int_{\theta}^{\infty} n.x . e^{-n.(x-\theta)} . dx}_{E(x) = \theta + \frac{1}{n}}$$

$$= \theta^2 + \frac{2}{n} . \left(\theta + \frac{1}{n} \right) = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2} \;//$$

$$\Rightarrow V(\hat{\theta}_n) = \theta^2 + \frac{2\theta}{n} + \frac{2}{n^2} - \left(\theta + \frac{1}{n} \right)^2$$

$$= \cancel{\theta^2} + \cancel{\frac{2\theta}{n}} + \frac{2}{n^2} - \left(\cancel{\theta^2} + \cancel{\frac{2\theta}{n}} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \;//$$

Böylece, $\lim_{n \to \infty} V(\hat{\theta}_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0$

ve $\lim_{n \to \infty} \left(E(\hat{\theta}_n) - \theta \right)^2 = \lim_{n \to \infty} \left(\theta + \frac{1}{n} - \theta \right)^2 = 0$

old. için $\hat{\theta}_n$ tahmin ediciler dizisi θ için Tutarlıdır.

Örnek

$x_1, \dots, x_n$; ortalaması ve varyansı bilinmeyen normal dağılımdan n büyüklüğünde örneklem olsun. $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$ örneklem varyansının σ^2 nin yansız tahmin edicisimi?

$$E(S^2) \overset{?}{=} \sigma^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum x_i^2 - 2\bar{x} \cdot \underbrace{\sum x_i}_{= n \cdot \bar{x}} + n \cdot \bar{x}^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right]$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \Longrightarrow E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2 \Rightarrow E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

$$\frac{\sigma^2}{n} = E(\bar{X}^2) - \mu^2$$

$$\Rightarrow E(S^2) = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} E(x_i^2) - n \cdot E(\bar{x}^2) \right]$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \left[n \cdot (\sigma^2 + \mu^2) - n \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{n-1}} \cdot \left[(\cancel{n-1}) \cdot \sigma^2 \right] = \sigma^2,$$

örneklem varyansı S^2, σ^2 için yansızdır.

Bu tahmin edicinin tutarlı olması,

Chebshew den

$$P(|S^2 - \sigma^2| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(S^2)}{\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} V(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

tutarlıdır.